

Tentamen Algoritmen en Datastructuren

woensdag 7 november 2007. 14 - 17 uur

Het tentamencijfer T is $(p/10) + 1$, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is.

Met de zinsnede 'geef een algoritme' in een opgave wordt bedoeld:

**beschrijf een algoritme in pseudocode (dus niet in Java),
licht de werking ervan toe,
beargumenteer de correctheid.**

1. (30 punt) Deze opgave gaat over zoekbomen (search trees) waarbij in de interne knopen gehele getallen opgeslagen zijn.
 - (a) Definieer het begrip *binaire zoekboom*.
 - (b) Een AVL-boom is een binaire zoekboom die hoogte-gebalanceerd is. Geef de definitie van het begrip *hoogte-gebalanceerd*.
 - (c) Geef een voorbeeld van een AVL-boom die de getallen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 bevat.
 - (d) Bewijs dat voor de hoogte h van een AVL-boom met n items geldt dat $h = O(\log n)$. (Aanwijzing: stel het minimale aantal knopen van een AVL-boom met hoogte h gelijk aan $n(h)$, en laat zien dat $n(h) \geq 2^{h/2-1}$.)
 - (e) Geef een algoritme voor het toevoegen van een knoop in een AVL-boom. De resulterende boom moet uiteraard weer een AVL-boom zijn! Analyseer de tijdscomplexiteit van het algoritme (elementaire bewerkingen op getallen en bomen kunnen in $O(1)$ tijd verricht worden).
2. (30 punt) Deze opgave gaat over *ongerichte* grafen.
 - (a) Geef een efficiënt algoritme voor *breadth-first search*. Kies een geschikte datastructuur voor de graaf, en geef een analyse van de tijdscomplexiteit. Aanwijzing: gebruik labels bij de knopen en de kanten, en gebruik lijsten (sequences) om knopen op gelijke diepte op te slaan.
 - (b) Geef aan hoe het algoritme voor breadth-first search aangepast kan worden om een cykel te vinden.

Z.O.Z.

3. (30 punt) Deze opgave gaat over complexiteitsklassen en de beslissingsproblemen SAT en CIRCUIT-SAT. SAT is als volgt gedefinieerd:

gegeven een formule A in de propositiologica die alleen de connectieven \neg, \wedge, \vee bevat, is er een toekenning van waarheidswaarden aan de variabelen in A zodanig dat A de waarde *true* krijgt?

CIRCUIT-SAT is als volgt gedefinieerd:

gegeven een logische schakeling S opgebouwd uit niet-, en- en of-poorten, is er een toekenning van nullen en enen aan de invoerdraden van S zodanig dat de uitvoerdraden van S de waarde 1 krijgen?

- (a) Geef definities van de complexiteitsklassen P (polynomiaal) en NP (nondeterministisch polynomiaal).
- (b) Toon aan dat CIRCUIT-SAT in NP zit.
- (c) Er geldt dat SAT NP-volledig (NP-*complete*) is. Leg uit wat dit betekent.
- (d) Gebruik het feit dat SAT NP-volledig is om aan te tonen dat CIRCUIT-SAT NP-volledig is. (NB: let op de goede richting van de probleemreductie.)
- (e) Leg uit waarom het onwaarschijnlijk wordt gevonden dat SAT in P zit.